CAMBI DI COORDINATE

00. a. Rotazione di $\pi/2$, la matrice di rotazione è $\begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi le formule sono: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ cioè: $\begin{cases} x = -Y \\ y = X \end{cases}$ e inversamente $\begin{cases} X = y \\ Y = -x \end{cases}$

b. Rotazione di $\pi/2$ come sopra, ma nuova origine in $\{x = 2\ ;\ y = 0\}$: $\begin{cases} x - 2 = -Y \\ y = X \end{cases}$ $\begin{cases} X = y \\ Y = -x + 2 \end{cases}$

c. Rotazione di π e nuova origine in $\{x = 2\ ;\ y = 2\}$: $\begin{cases} x = -X + 2 \\ y = -Y + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} X = -x + 2 \\ Y = -y + 2 \end{cases}$

d. Rotazione di $-\pi/6$, matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases}$ $\begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y)/2 \end{cases}$

e. Rotazione di $-\pi/6$ e nuova origine nel punto $\{x = x_0\ ;\ y = 1\}$.

$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ quindi: $\begin{cases} x = x_0 + (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = 1 + (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases}$

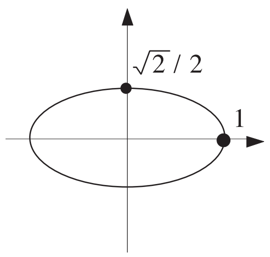
La trasformazione inversa si ha trasponendo la matrice: $\begin{cases} X = (\sqrt{3}(x - x_0) - (y - 1))/2 \\ Y = ((x - x_0) + \sqrt{3}(y - 1))/2 \end{cases}$ che si scrive anche come $\begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y - \sqrt{3}x_0 + 1)/2 \\ Y = (x + \sqrt{3}y - x_0 - \sqrt{3})/2 \end{cases}$.

La vecchia origine giace sull'asse X, quindi, sostituendo $\{x = 0\ ;\ y = 0\}$ nelle seconde formule, si ha $\{X = (-\sqrt{3}x_0 + 1)/2\ ;\ Y = (-x_0 - \sqrt{3})/2\}$ e dev'essere $Y = 0$, cioè $x_0 = -\sqrt{3}$.

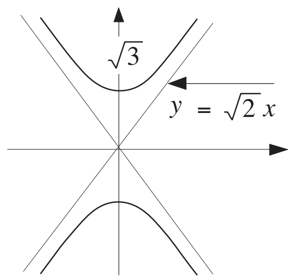
Le formule sono quindi: $\begin{cases} x = -\sqrt{3} + (\sqrt{3}X + Y)/2 \\ y = 1 + (-X + \sqrt{3}Y)/2 \end{cases}$ $\begin{cases} X = (\sqrt{3}x - y + 4)/2 \\ Y = \phantom{(\sqrt{3}x -}(x + \sqrt{3}y)/2 \end{cases}$

CONICHE

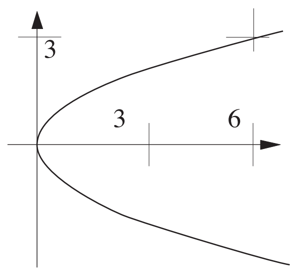
01. a. Ellisse



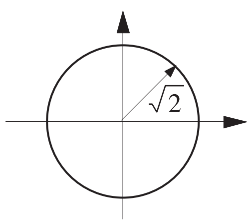
b. Iperbole



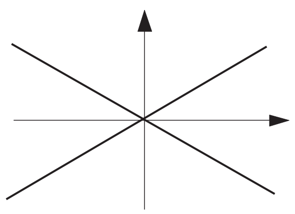
c. Parabola



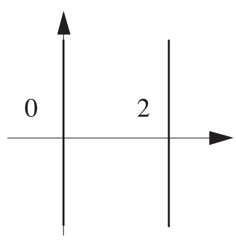
d. Circonferenza



e. Due rette incidenti $x = \pm\sqrt{3}y$



f. Due rette parallele: $x = 2 \quad x = 0$



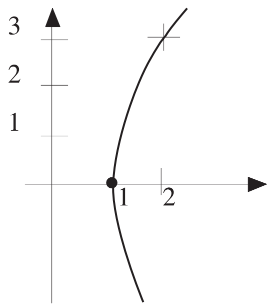
g. Ellisse senza punti reali.

h. Un solo punto: $(0, 0)$ (due rette incidenti complesse coniugate).

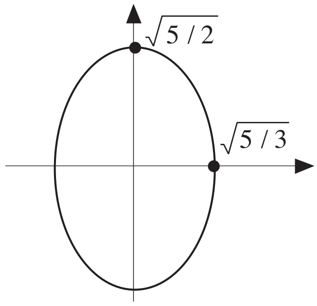
i. Unione di due rette : gli assi $x = 0$ e $y = 0$.

j. Nessun punto reale (due rette parallele complesse coniugate).

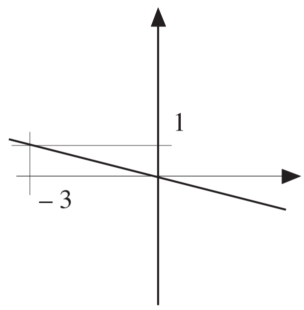
k. Parabola



l. Ellisse



m. Due rette incidenti:
$x = 0 \quad x = -3y$



n. Unione di due rette parallele: $x = 1$ e $x = 2$.

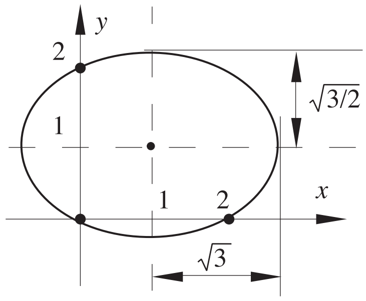
o. Una retta (contata due volte): $x = y$.

p. Un solo punto: $(-1, 0)$ (due rette incidenti complesse coniugate).

02. L'ellisse si può scrivere come:

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{3/2} = 1$$

Il centro è quindi $(1, 1)$ e i semiassi misurano rispettivamente $\sqrt{3}$ e $\sqrt{3/2}$, per cui i vertici sono $V_{1,2} = (1 \pm \sqrt{3}\,,\, 1)$ e $V_{3,4} = (1\,,\, 1 \pm \sqrt{3/2})$.
Dato che $a^2 = 3$ e $b^2 = 3/2$, si ha $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3/2}$. I fuochi sono pertanto $F_{1,2} = (1 \pm \sqrt{3/2}\,,\, 1)$.
Intersecando l'ellisse con gli assi coordinati si trovano i punti $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.
Tenendo conto di questi punti è possibile eseguire un disegno più accurato.



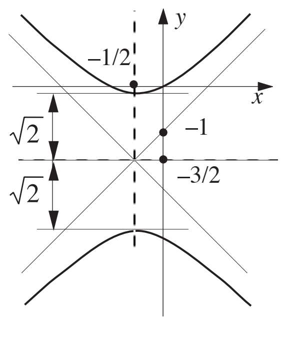
03. a. Completiamo i quadrati:

$(x^2 + x + 1/4) - (y^2 + 3y + 9/4) = 1/4 - 9/4$

$(x + 1/2)^2 - (y + 3/2)^2 = -2$

$$-\frac{(x+1/2)^2}{2} + \frac{(y+3/2)^2}{2} = 1$$

Si tratta quindi di una iperbole di centro $(-1/2, -3/2)$ con asintoti paralleli alle due bisettrici degli assi cartesiani. Gli asintoti sono perciò $(x + 1/2) \pm (y + 3/2) = 0$.
Inoltre ha i vertici lungo l'asse di simmetria parallelo all'asse y. I vertici sono $V_{1,2} = (-1/2\,,\, -3/2 \pm \sqrt{2})$. Il fatto che passi per l'origine aiuta a disegnarla con maggior precisione.
Per quanto riguarda i fuochi: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$ e quindi sono $F_{1,2} = (-1/2\,,\, -3/2 \pm 2)$

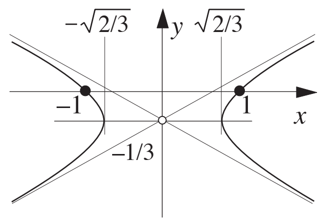


b. Completiamo i quadrati:

$$-x^2 + 3y^2 + 2y + 1 = 0 \qquad -x^2 + 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -1 + 3 \cdot \frac{1}{9}$$

$$-x^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \qquad x^2 - 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \qquad \frac{x^2}{2/3} - \frac{(y+1/3)^2}{2/9} = 1$$

L'iperbole ha centro in $(0, -1/3)$. Gli asintoti sono le rette $x/(\sqrt{2/3}) \pm (y + 1/3)/(\sqrt{2/9}) = 0$, rette che hanno coefficiente angolare $\sqrt{3}/3$ e che quindi formano angoli di $\pm\pi/6$ con l'asse delle ascisse. I vertici distano $\sqrt{2/3}$ dal centro e sono quindi $V_{1,2} = (\pm\sqrt{2/3}, -1/3)$. I fuochi sono $F_{1,2} = (\pm\sqrt{2/3 + 2/9}, -1/3) = (\pm\sqrt{8/9}, -1/3)$. Per disegnarla meglio cerchiamone anche due punti. Per esempio le intersezioni con l'asse x sono i due punti $(\pm 1, 0)$.

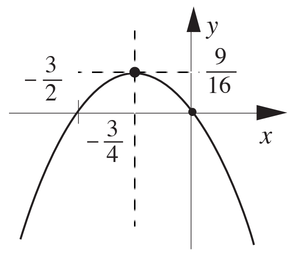


04. a. Completiamo i quadrati:

$$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) = -2y + 2 \cdot \frac{9}{16}$$

$$2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = -2\left(y - \frac{9}{16}\right) \qquad \left(y - \frac{9}{16}\right) = -\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

Quindi il vertice è $V(-3/4\,,\,9/16)$. La parabola ha la concavità verso il basso e passa per l'origine. Questo basta a disegnarla.
Il fuoco è $F = (-3/4\,,\,9/16 - 1/4) = (-3/4\,,\,5/16)$, la direttrice è $y = 9/16 + 1/4$ cioè $y = 13/16$.

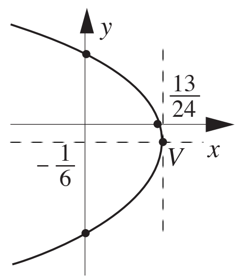


b. Completiamo i quadrati:

$$2x - 1 = -3y^2 - y \qquad 2x - 1 - 3\cdot\frac{1}{36} = -3\left(y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36}\right) \qquad 2x - \frac{13}{12} = -3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2$$

$$2\left(x - \frac{13}{24}\right) = -3\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 \qquad \left(x - \frac{13}{12}\right) = -\frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{6}\right)^2$$

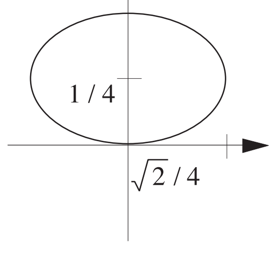
Quindi il vertice è $V(13/24\,,\,-1/6)$. La parabola ha la concavità verso sinistra. Per disegnarla intersechiamola con gli assi: ponendo $y = 0$ troviamo il punto $(1/2, 0)$, ponendo $x = 0$ troviamo i punti $\left(0, \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}\right)$ cioè circa $(0\,,\,0.43)$ e $(0, -0.76)$. Questo basta a disegnarla.
Il fuoco è $F(13/24 - 1/(4 \cdot 3/2)\,,\,-1/6) = (-3/8, -1/6)$, la direttrice è $x = 13/24 + 1/(4 \cdot 3/2)$, cioè $x = 17/24$.

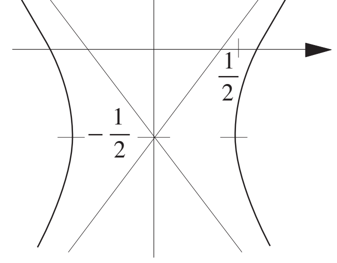


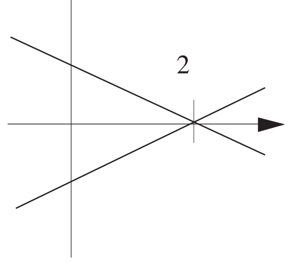
05. a. Ellisse: $\dfrac{x^2}{1/8} + \dfrac{(y - 1/4)^2}{1/4} = 1$

b. Iperbole: $\dfrac{x^2}{1/4} - \dfrac{(y + 1/2)^2}{3/4} = 1$. Gli asintoti sono: $(y + 1/2) = \pm\sqrt{3}x$

c. Unione di due rette incidenti: $y = \pm\sqrt{2}/2(x - 2)$



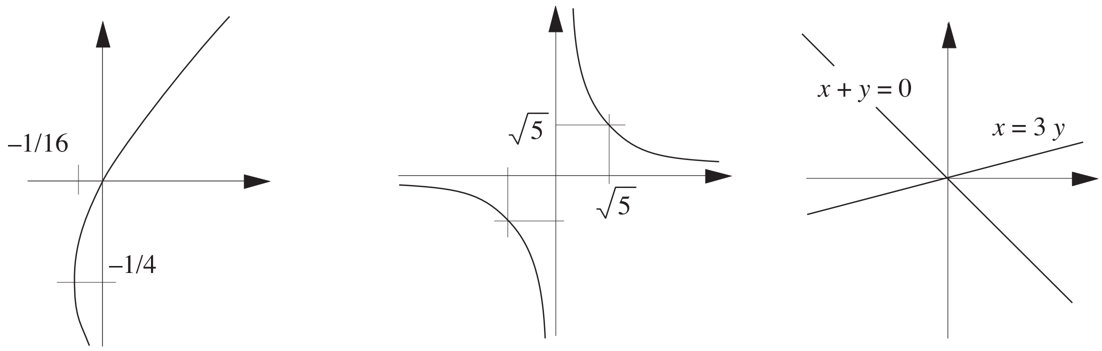




d. Parabola: $(y + 1/4)^2 = 2(x + 1/16)$

e. Iperbole di asintoti: $x = 0$ e $y = 0$.

g. Unione di due rette incidenti: $x + y = 0$ e $x = 3y$.



f. Ellisse senza punti reali.

h. Due rette parallele non reali.

06. a. L'iperbole ha centro $(2,-1)$ ed è $\dfrac{(x-2)^2}{a^2} - \dfrac{(y+1)^2}{b^2} = 1$. Gli asintoti sono paralleli alle bisettrici degli assi e sono $\dfrac{x-2}{a} \pm \dfrac{y+1}{b} = 0$, da cui $a = b$.
L'iperbole passa per $(0,0)$, quindi $(4/a^2) - (1/a^2) = 1$, da cui $a^2 = 3$.
L'iperbole è pertanto $\dfrac{(x-2)^2}{3} - \dfrac{(y+1)^2}{3} = 1$.

b. Gli asintoti sono le rette $y = \pm 2(x-1)$ che si possono scrivere anche come $\dfrac{y}{2} \pm (x-1) = 0$, per cui l'iperbole ha equazione $\dfrac{y^2}{4} - (x-1)^2 = a^2$. Perché passi per il punto $(0,3)$ occorre che $\dfrac{9}{4} - 1 = a^2$, quindi $a^2 = 5/4$.
L'iperbole è perciò : $y^2 - 4(x-1)^2 = 5$.

c. La parabola ha vertice $(1,1)$ ed è quindi $(y-1) = a(x-1)^2$. Passa per $(0,0)$, quindi $-1 = a$.
La parabola è $(y-1) = -(x-1)^2$.

d. L'ellisse ha centro $(1,-1)$ ed è $\dfrac{(x-1)^2}{a^2} + \dfrac{(y+1)^2}{b^2} = 1$. Il semiasse parallelo all'asse y misura 2, quindi $b = 2$. Inoltre passa per $(0,0)$, quindi $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4} = 1$, da cui $a^2 = 4/3$.
L'ellisse è: $\dfrac{3(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$.

e. Basta scrivere il prodotto delle equazioni delle due rette. La conica è: $(x-y+1)(x+3y) = 0$.

07. Completiamo i quadrati (anzi l'unico quadrato): $(x+a)^2 + ay^2 = a^2 - 2$.
La parte di secondo grado, che decide se una conica è di tipo parabolico, iperbolico o ellittico, dipende solo da a come coefficiente di y^2. Pertanto:

Se $a = 0$ è di tipo parabolico e precisamente è $x^2 = -2$ cioè una coppia di rette parallele, ma non reali.

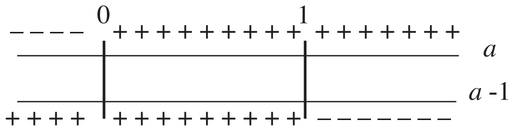
Se $a < 0$ è di tipo iperbolico ed è un'iperbole, purché non si annulli il termine noto. Il termine noto si annulla per $a = \pm\sqrt{2}$. Quindi, se $a < 0$ e $a \neq -\sqrt{2}$, si tratta di un'iperbole, se $a = -\sqrt{2}$ è una coppia di rette reali.

Se $a > 0$ è di tipo ellittico ed è un'ellisse, purché il termine noto sia positivo. Il termine noto è positivo per $a > \sqrt{2}$, quindi, se $a > \sqrt{2}$, si tratta di un'ellisse, se $0 < a < \sqrt{2}$ non ha punti reali. Se infine $a = \sqrt{2}$ si tratta di un'ellisse degenere che di reale ha solo il punto $(-a, 0)$.

Non è mai una circonferenza (dovrebbe essere $a = 1$, ma in questo caso non ha punti reali).
In conclusione:

$a < -\sqrt{2}$	$a = -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < a < 0$	$a = 0$	$0 < a < \sqrt{2}$	$a = \sqrt{2}$	$a > \sqrt{2}$
iperbole	2 rette reali	iperbole	rette // non reali	non reale	un punto	ellisse

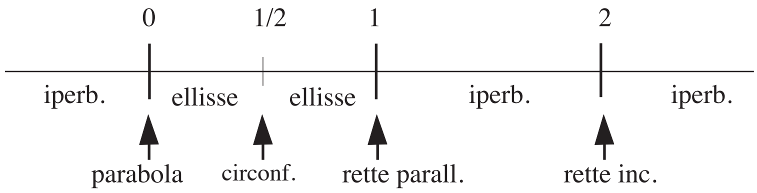
08. Esaminiamo i segni dei coefficenti di x^2 e y^2 per ogni $a \in \mathbb{R}$:



Per cui:
Se $a > 0$ tipo iperbolico
Se $0 < a < 1$ tipo ellittico
Se $a > 1$ tipo iperbolico
Se $a = 0, 1$ tipo parabolico

Quelle di tipo iperbolico sono tutte iperboli, tranne $a = 2$ per cui è coppia di rette incidenti.
Quelle di tipo parabolico sono tutte parabole, tranne $a = 1$ per cui è coppia di rette parallele.
Quelle di tipo ellittico sono tutte ellissi a punti reali dato che passano per $(0, 0)$. Per $a = 1/2$ si ha una circonferenza.

Conclusione:



STUDIO DI CONICHE

Nota: Le coniche si studiano mediante l'esame del determinante della matrice associata (che chiameremo A) e il carattere di definizione della forma quadratica che è dato dal segno del determinante della matrice 2×2 associata (che chiameremo B). Per vedere se le ellissi hanno punti reali si cerca di intersecarle con rette passanti per il centro di simmetria. Per vedere se sono circonferenze si cerca se $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ e se ha punti reali. Per vedere se un'iperbole è equilatera si guarda se $a_{11} = -a_{22}$.

11. a. La matrice B della forma quadratica ha determinante 0, quindi la f.q. è semidefinita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di una parabola.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

b. La matrice B ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di una iperbole non equilatera (dato che $a_{11} \neq -a_{22}$).

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c. La matrice B ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice A ha determinante 0, quindi si tratta di una coppia di rette incidenti.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -3 & -1/2 \\ \hline 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

d. La matrice B ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice A ha determinante 0, quindi si tratta di una coppia di rette *coniugate non reali* che di reale ha solo il punto $(0, 0)$.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e. La matrice B ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di un'ellisse. Per vedere se ha punti reali, senza cercare il centro, intersechiamola con tutte le rette del tipo $y = k$. Si trova un'equazione di secondo grado il cui discriminante è $\Delta = -k^2 - k - 1$ è sempre negativo per ogni $k \in \mathbb{R}$, quindi l'ellisse non ha punti reali.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ \hline 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

f. La matrice B della forma quadratica ha determinante positivo, quindi la f.q. è definita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di un'ellisse. Ha punti reali, perché passa per $(0, 0)$.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

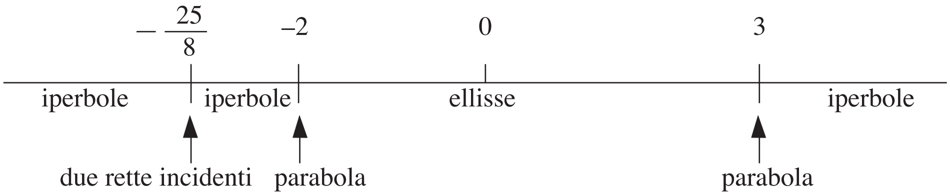
g. Basta completare i quadrati per vedere che si tratta di una circonferenza di centro $C(1/6, 0)$ e raggio $1/6$.

h. La matrice B della forma quadratica ha determinante negativo, quindi la f.q. è indefinita. La matrice A ha determinante non nullo quindi si tratta di una iperbole equilatera ($a_{11} = a_{22} = 0$).

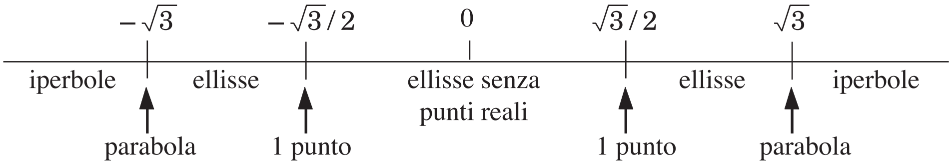
$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 1/2 & -1 \end{array}\right)$$

12. a. Si ha: $\det(B) = 6+\lambda-\lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $-2 < \lambda < 3$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = -25/8$. Le ellissi sono tutte a punti reali perché passano per $(0, 0)$. Non ci sono circonferenze.

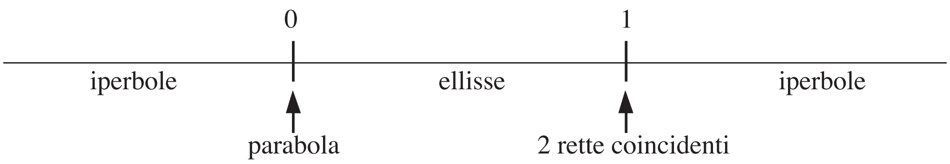
Per $\lambda = -7$ c'è l'unica iperbole equilatera.



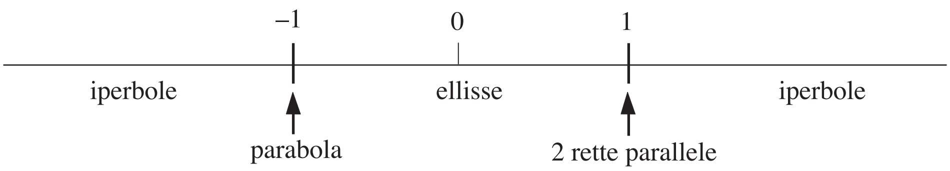
b. Si ha: $\det(B) = 3-\lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$. Per distinguere le ellissi a punti reali dalle altre si può considerare la retta $2\lambda x + 6y = 0$ che è la derivata parziale rispetto a y e quindi passa sempre per il centro di simmetria. Ponendola a sistema con l'equazione della conica, si trova che solo per $\mid \lambda \mid \geq \sqrt{3}/2$ ci sono intersezioni reali , quindi solo quelle ellissi hanno punti reali. Un altro modo più empirico è il seguente: per $\lambda = 0$ l'ellisse non ha evidentemente punti reali, mentre per $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ ne ha. "Per continuità", allora, nell'intervallo $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$, le ellissi non hanno punti reali. Non ci sono circonferenze. Non ci sono iperboli equilatere.



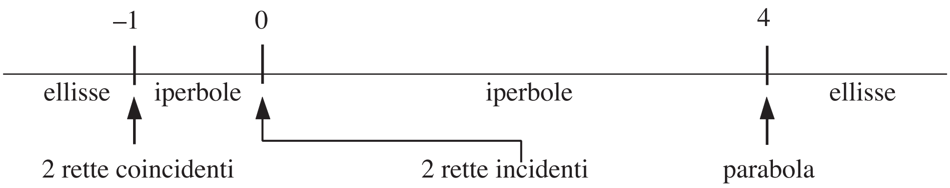
c. Si ha: $\det(B) = \lambda - \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $0 < \lambda < 1$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = 1$. Per $\lambda = 1$ la conica si scrive come $(x+y+1)^2 = 0$ ed è una coppia di rette coincidenti. Non ci sono circonferenze. Le ellissi hanno tutte punti reali (intersecandole con $x = 0$ si trova sempre $y = -1$). Iperbole equilatera per $\lambda = -1$.



d. Si ha: $\det(B) = 1 - \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $-1 < \lambda < 1$. La matrice A ha determinante 0 per $\lambda = 1$. Per $\lambda = 1$ la conica si scrive subito come $(x + y)(x + y + 2) = 0$ ed è quindi una coppia di rette parallele. Le ellissi sono tutte a punti reali perché contengono il punto $(0, 0)$. Per $\lambda = 0$ si ha una circonferenza. Non ci sono iperboli equilatere.



e. Si ha: $\det(B) = -4 - 3\lambda + \lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $\lambda < -1$ e per $\lambda > 4$. La matrice A ha determinante $-\lambda/4 - \lambda^2/2 - \lambda^3/4$ che si annulla per $\lambda = 0$ e per $\lambda = -1$. Non ci sono circonferenze. Le ellissi sono tutte a punti reali perché contengono il punto $(0, 0)$. Per $\lambda = -1$ la conica è $-x^2 + 4xy - 4y^2 = -(x - 2y)^2 = 0$ ed è una coppia di rette coincidenti. Per $\lambda = 3/2$ iperbole equilatera.



f. Si ha: $\det(B) = -1 - 2\lambda + 3\lambda^2$, quindi $\det(B) > 0$ per $\lambda < -1/3$ e per $\lambda > 1$. La matrice A ha determinante $-\lambda - 2\lambda^2 + 3\lambda^3$ che si annulla per $\lambda = -1, 0, 1/3$. Tutte le ellissi hanno centro

$(0,0)$, dato che la conica non ha termini di primo grado. Quindi per distinguere quelle a punti reali basta intersecarle con la retta $x=0$ che passa sempre per il centro e si vede che ha intersezione solo per $\lambda>0$. Per $\lambda=-1/3$ la conica è $((2/3)x+y)^2+1/3=0$, quindi non ha punti reali (due rette parallele non reali). Per $\lambda=1$ la conica è $(2x+y)^2-1=0$, quindi è costituita dalle due rette parallele $2x+y=\pm1$. Non ci sono circonferenze. Non ci sono iperboli equilatere.

13. a. Per scomporre la forma quadratica uguagliamola a zero: $3x^2+2xy-y^2=0$. Dividendo per y^2, si ottiene un'equazione di secondo grado in x/y : $3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)-1=0$. Le soluzioni sono $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}, -1$ per cui la forma quadratica è $3\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{x}{y}+1\right)$ e, moltiplicando per y^2 si ha: $(3x-y)(x+y)$. Dato che mancano i termini di grado 1, il centro è $(0,0)$. Gli asintoti sono quindi le rette parallele a $3x-y=0$ e $x+y=0$ e passanti per $(0,0)$, cioè proprio $3x-y=0$ e $x+y=0$.

    b. La forma quadratica si scompone subito come $x\cdot(x+y)=0$.
    Il centro della conica si trova con il sistema delle derivate parziali $\begin{cases}2x+y-2=0\\ x+1\qquad\ \ =0\end{cases}$. La soluzione è $C(-1,4)$. Gli asintoti sono le rette parallele a $x=0$ e $x+y=0$ e passanti per C, cioè: $x+1=0$ e $x+y=3$.

    c. Per scomporre la forma quadratica scriviamo $x^2+3xy+y^2=0$ e risolviamo l'equazione di 2^0 grado $(x/y)^2+3(x/y)+1=0$. Si trova: $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
    Il centro della conica si trova risolvendo il sistema delle derivate parziali ed è $\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{7}{5}\right)$, quindi gli asintoti sono: $2(x-8/5)=(-3\pm\sqrt{5})(y+7/5)$.

14. a. La forma quadratica è associata alla matrice simmetrica $B=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$ i cui autovalori sono 5 e 1.
    Il centro è $(0,0)$, quindi la forma canonica è $5X^2+Y^2=7$ o meglio $\dfrac{X^2}{7/5}+\dfrac{Y^2}{7}=1$.
    I semiassi misurano perciò $\sqrt{7/5}$ e $\sqrt{7}$.

    b. Come sopra gli autovalori della matrice B della forma quadratica sono 5 e 1. Ma il centro è $(-1,2)$, quindi, prima di scrivere la forma canonica, occorre traslare: $\begin{cases}X&=&x+1\\Y&=&y-2\end{cases}$ e l'equazione diventa $3X^2+4XY+3Y^2=14$. La forma canonica è perciò $5X^2+Y^2=14$ e i semiassi misurano $\sqrt{14/5}$ e $\sqrt{14}$.

15. Scriviamo il sistema delle derivate parziali $\begin{cases}6x+6y-6\quad\ =0\\6x-10y+10=0\end{cases}$. La soluzione è il centro della conica: $C(0,1)$.
    Le direzioni degli assi sono date dagli autovettori della forma quadratica che è associata alla matrice simmetrica $A=\begin{pmatrix}3&3\\3&-5\end{pmatrix}$. Gli autovalori di B sono $4,-6$. Rispettivi autovettori sono $v_1(3,1)$ e $v_2(1,-3)$. Quindi gli assi sono le rette che passano per C e hanno questi vettori direzionali, cioè:
    $x-3y+3=0 \qquad 3x+y-1=0$

16. a. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B)<0$, quindi è un'iperbole. Gli autovalori della forma quadratica sono $-1,4$. Autovettori rispettivi sono $(1,2)$, $(2,-1)$. Il sistema delle derivate parziali è $\{6x-4y-6=0\ ;\ -4x+4=0\}$, quindi il centro della conica è $C(1,0)$. Gli assi di simmetria hanno come versori gli autovettori e passano per C. La forma quadratica della conica si spezza in $x(3x-4y)$, quindi gli asintoti passano per C e sono paralleli a $x=0$ e $3x-4y=0$.

Gli assi, gli asintoti e un suo punto qualunque, per esempio $(0,0)$, permettono di disegnarla con buona precisione.

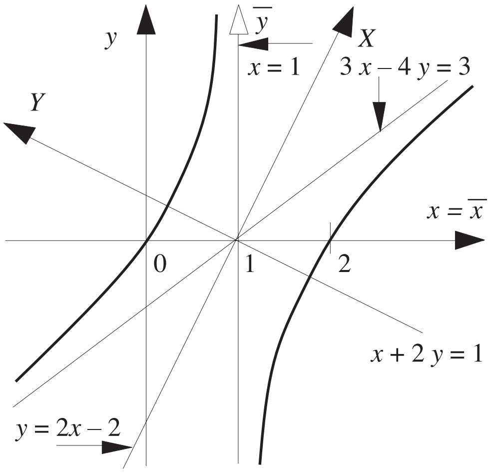
Per avere la forma canonica, prima operiamo la traslazione di O in C:

$\begin{cases}\overline{x} = x-1\\ \overline{y} = y\end{cases}$ $\begin{cases}x = \overline{x}+1\\ y = \overline{y}\end{cases}$ e si ha:

$3\overline{x}^2 - 4\overline{x}\,\overline{y} - 3 = 0$. Per la rotazione si assumono come versori degli assi gli autovettori normalizzati e orientati in modo che la coppia sia positiva, per esempio $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. La rotazione si scrive ponendo gli autovettori in colonna:

$$\begin{cases}x-1 = \overline{x} = (X-2Y)/\sqrt{5}\\ y \quad\;\; = \overline{y} = (2X+Y)/\sqrt{5}\end{cases}$$

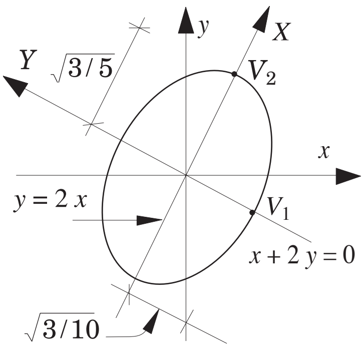
La forma canonica $-X^2 + 4Y^2 - 3 = 0$ si scrive conoscendo gli autovalori e il termine noto che si ricava dall'equazione in $\overline{x}, \overline{y}$.



b. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B) > 0$, quindi è un'ellisse con punti reali; per esempio ponendo $y = 0$ si trovano $(\pm\sqrt{3}/3, 0)$. Gli autovalori della forma quadratica sono $5, 10$. Autovettori rispettivi sono $(1,2)$, $(-2,1)$.
Normalizzandoli si ottiene una base ortononormale destrorsa. Gli assi sono le rette passanti per C e parallele agli autovettori. Non essendoci termini di primo grado, il centro è $C(0,0)$, quindi la forma canonica è immediata ed è $5x^2 + 10y^2 = 3$ (autovalori come coefficienti). Dalla forma canonica si ricavano immediatamente le lunghezze dei semiassi: $a = \sqrt{3/5}$ e $b = \sqrt{3/10}$.

La rotazione è $\begin{cases}x = (X-2Y)/\sqrt{5}\\ y = (2X+Y)/\sqrt{5}\end{cases}$.

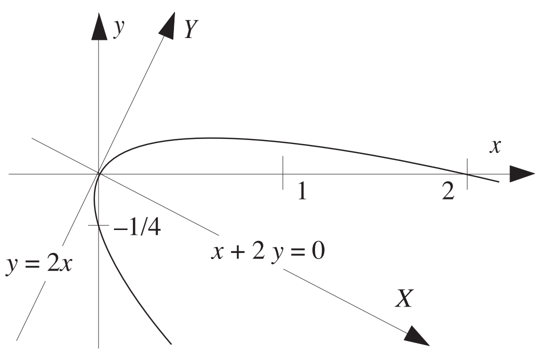
Due vertici si hanno trovando due punti sugli assi che abbiano distanza a e b da C e si ha:
$V_1 = (\sqrt{6}/5, -\sqrt{6}/10)$ $\qquad V_2 = (\sqrt{3}/5, 2\sqrt{3}/5)$.



c. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B) = 0$, quindi è una parabola. Gli autovalori della forma quadratica sono $0, 5$. Gli autospazi sono rispettivamente $(2t, -t)$, $(t, 2t)$. Un versore per l'asse è l'autovettore relativo all'autovalore 0.
Dalla trasformazione di coordinate

$\begin{cases}x = \quad (2X+Y)/\sqrt{5}\\ y = (-X+2Y)/\sqrt{5}\end{cases}$ che usa i versori $(2,-1)$, $(1,2)$ normalizzati o inversamente $\begin{cases}X = (2x-y)/\sqrt{5}\\ Y = (x+2y)/\sqrt{5}\end{cases}$ si ricavano la forma canonica $X = 5Y^2$ e il vertice $V(0,0)$. Per disegnarla basta un punto per esempio $(2,0)$.

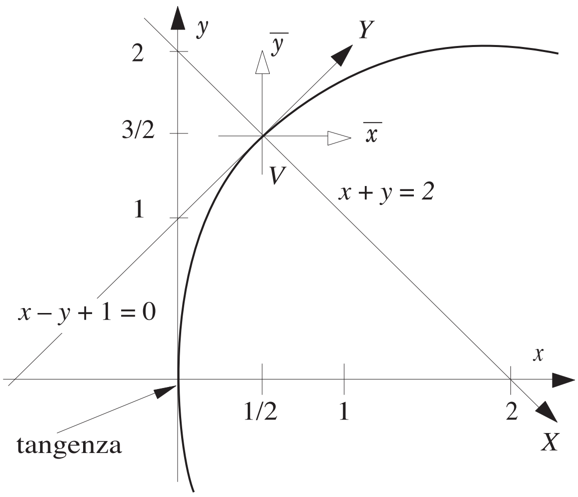
Altro modo: L'equazione si scrive come $(x+2y)^2 - 2x + y = 0$. Dato che $x+2y = 0$ e $-2x+y = 0$ sono ortogonali, si arriva subito al cambio di coordinate di sopra (e si vede che $V = (0,0)$).



d. La matrice A ha determinante non nullo e $\det(B) = 0$, quindi è una parabola. Gli autovalori della matrice B sono $0, 5$. Autovettori rispettivamente $(1,-1)$, $(1,1)$. L'asse è parallelo all'autovettore

relativo a 0.
Per trovare V si interseca la parabola con una retta ortogonale all'asse, per esempio $y = x$, e si trovano i punti $(0, 0)$ e $(2, 2)$. Il loro punto medio $M(1, 1)$ è sull'asse. L'asse è quindi $x + y = 2$. Intersecando la parabola con l'asse si trova il vertice $V(1/2, 3/2)$. La si può disegnare usando il suo punto $(0, 0)$.

Inoltre, la parte non di secondo grado dell'equazione è $-8x = 0$, quindi questa è la retta tangente in $(0, 0)$. Traslando in modo che V diventi O con $\begin{cases} \overline{x} = x - 1/2 \\ \overline{y} = y - 3/2 \end{cases}$ l'equazione diventa
$(\overline{x} + \overline{y})^2 - 4\overline{x} + 4\overline{y} = 0$.
La rotazione è
$\begin{cases} \overline{x} = (X + 2Y)/\sqrt{2} \\ \overline{y} = (-X + Y)/\sqrt{2} \end{cases}$ o anche:
$\begin{cases} X = (\overline{x} - \overline{y})/\sqrt{2} \\ Y = (\overline{x} + \overline{y})/\sqrt{2} \end{cases}$.
La forma canonica è allora $X = (\sqrt{2}/4)Y^2$



Altro modo: La si scrive come $(x + y)^2 - 8x = 0$. Aggiungendo λ alla forma quadratica si ottiene $(x + y + \lambda)^2 - 8x - 2\lambda x - 2\lambda y - \lambda^2 = 0$ o anche $(x + y + \lambda)^2 - \Big((8 + 2\lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2\Big) = 0$. Si sceglie λ in modo che le due rette $x + y + \lambda = 0$ e $(8 + 2\lambda)x + 2\lambda y + \lambda^2 = 0$ siano ortogonali e si trova $\lambda = -2$, per cui l'equazione diventa $(x + y - 2)^2 - 4(x - y + 1) = 0$. A questo punto è chiaro che mediante la trasformazione $\begin{cases} X = (x - y + 1)/\sqrt{2} \\ Y = (x + y - 2)/\sqrt{2} \end{cases}$ si arriva alla forma canonica $2Y^2 - 4\sqrt{2}X = 0$ e che quindi l'asse è $x + y - 2 = 0$ e la tangente in V è $x - y + 1 = 0$.

e. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) < 0$, quindi è l'unione di due rette reali incidenti. Il centro della conica si trova risolvendo il sistema lineare delle due derivate parziali $\{4x + y - 4 = 0\ ;\ x + 2 - 2y = 0\}$ ed è $C(2/3, 4/3)$. Tagliando la conica con una retta non passante per C per esempio $y = 0$ e si trovano i punti $(2, 0)$ e $(0, 0)$. Le rette passanti per C e per essi sono $x + y - 2 = 0$ e $2x - y = 0$. Si verifica subito che il loro prodotto da l'equazione di partenza. Non è quindi necessaria la riduzione a forma canonica.

f. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) = 0$, quindi è l'unione di due rette parallele o parallele non reali o coincidenti. La decomposizione è immediata:
$(9x^2 - 12xy + 4y^2) + 3x - 2y = 0 \qquad (3x - 2y)^2 + 3x - 2y = 0 \qquad (3x - 2y + 1) \cdot (3x - 2y) = 0$
Quindi è l'unione di due rette parallele reali. Non è necessaria la riduzione a forma canonica.

g. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) > 0$, quindi la conica ha un solo punto reale. Il punto è $C(-2/3, -1/3)$ centro della conica che si trova risolvendo il sistema lineare delle due derivate parziali $\{10x - 8y + 4 = 0\ ;\ 10y - 8x - 2 = 0\}$. Intersecando la conica con la retta $y = 0$ non passante per il centro si trovano i due punti non reali $P_1((-2 + i)/5, 0)$ e $P_2((-2 - i)/5, 0)$. Le rette non reali CP_1 e CP_2 sono: $5x + (-4 \pm 3i)y + 2 \pm i = 0$. Si verifica subito che il loro prodotto da l'equazione di partenza. Non è quindi necessaria la riduzione a forma canonica.

h. La matrice A ha determinante nullo e $\det(B) = 0$, quindi è l'unione di due rette parallele o parallele non reali o coincidenti. La decomposizione algebrica è immediata: $(x + y)^2 + 1 = 0$ cioè $(x + y + i) \cdot (x + y - i) = 0$. Quindi si tratta di due rette parallele non reali.